Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις 7-11-19 8ο μάθημα

Την Δευτέρα 11/11/19 δεν θα γίνει μάθημα
Αναπλήρωση Τετάρτη 9-12:00 θα ανακοινωθεί η αίθουσα στο e-course.

Έστω $\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y), \ x \in I, \ x_0 \in J, \ D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$ Πρόβλημα αρχικών τιμών

$S = \{(x,y) : |x - x_0| \le \alpha, \ |y - y_0| \le b\} \subseteq D_f$
$R = \{(x,y) : |x - x_0| \le \alpha, \ y \in \mathbb{R}\} \subseteq D_f$

Συνθήκη Lipschitz : $|f(x,y) - f(x,z)| \le k|x-z|$

Παράδειγμα 1) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1,2)$ $\quad |y| \le 2 \Rightarrow |y| \le 4$
$R = \{|x-1| \le \alpha, \ |y-2| \le b\}$ $\boxed{\alpha, b > 0}$

• $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |2y| \le 2(2+2) = 8$ ικανοποιεί τη συνθήκη

2) $g(x,y) = x^2 \,\mathrm{Arctg}\, y + e^x$, $\{|x| \le 1, \ y \in \mathbb{R}\}$

$\left|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{1+y^2} \le \frac{1}{1} = 1$ άρα ικανοποιεί τη συνθήκη

3) $y' = 3xy^{1/3}$, $y(0) = 0$

$f(x,y) = 3xy^{1/3}$ $\quad$ Έστω $R = \{|x| \le a, \ |y| \le b\}$

Η μερική παράγωγος της f δεν υπάρχει άρα δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω το Λήμμα.

Παίρνουμε τον ορισμό.

$\forall\ (x,y),\ (x,z) \in R$

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |3x\sqrt[3]{y} - 3x\sqrt[3]{z}|$$
$$= 3|x|\,|\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}| \leq k|y-z|$$

Επομένως για $(\frac{\alpha}{2}, 0)$, $(x_0, z)$ $\forall z$ με $|z|<b$

θα πρέπει $3|z|\,|\sqrt[3]{z}| \leq k|z|$ $\forall\ 0 \leq z \leq b$

$$z^{1/3} \leq \frac{k}{3|\alpha|} z$$

άτοπο

**ΘΕΩΡΗΜΑ** Ας είναι $a, b>0$, $f$ συνεχής στο $R=\{(x,y): |x-x_0|\leq \alpha, |y-y_0|\leq b\} \subseteq D_f$

Αν η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο $R$ με σταθερά $k>0$ τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση που ορίζεται στο $I=\{|x-x_0|\leq r\}$ με $r=\min\{\alpha, \frac{b}{M}\}$ όπου $M = \sup_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$

Η λύση $y$ είναι το όριο της ακολουθίας $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως $\varphi(x) = y_0$, $x\in I$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\nu(s))\,ds, \quad x\in I.$$

Ακόμα είναι $|y(x) - \varphi_\nu(x)| \leq \frac{k}{M}\frac{(kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{kr}$, $x\in I$.

Παράδειγμα 33 Βιβλίο

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

θέτουμε $f(x,y) = x^2 + y^2$ και $R = \{(x,y) : |x| \le \alpha, |y| \le b\}$ $\alpha, b > 0$.
$\subseteq D_f$.

χρησιμοποιούμε το λήμμα: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |2b| \le 2b$, $(x,y) \in R$

Επομένως η $f$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με $k = 2b$.

και $\sup_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 2b$.

Είναι $M = \sup |f(x,y)| = \sup_R |x^2 + y^2| = \alpha^2 + b^2$.

άρα $r = \min\{\alpha, \frac{b}{M}\} = \min\{\alpha, \frac{b}{\alpha^2+b^2}\} > 0$.

οπότε από το θεώρημα ύπαρξης και μονοσημάντου

το Πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μια λύση

στο $[-r, r]$ και είναι μοναδική. ⌟

Ποιό όμως το μέγιστο διάστημα λύσης?

Γνωρίζουμε ότι $\frac{b}{\alpha^2+b^2} \le \frac{b}{2\alpha b} = \frac{1}{2\alpha}$ (το μέγιστο της παράστασ

όταν $\frac{1}{2\alpha} = \alpha$ θα γίνει μέγιστο

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = b.$

Παρ:

$y' = x + y^2, \ y(0) = 0$.

Υπάρχει ακριβώς μια λύση στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ Να υπολ. με προσέγγιση $1/10$.

Έχουμε ότι

$R = \{(x,y) \ |x| \le \frac{1}{2}, \ |y| \le b\}$

$f(x,y) = x + y^2, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = |2y| \le 2b \qquad M = \sup_R |f(x,y)| = \sup_R |x+y^2| = \frac{1}{2} + b^2$

$\boxed{\text{Άρα } k = 2b}$

$r = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1/2}{1/2 + b^2}\}$ και θέλουμε $r = \frac{1}{2}$

δηλ. $\frac{b}{1/2 + b^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 + \frac{1}{2} = 2b \Rightarrow b^2 - 2b + \frac{1}{2} = 0$.

$\Rightarrow b = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = \{ \ldots$

Διαλέγω μια απο τις 2 λύσεις

άρα $b = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

$\varphi_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\nu(s))\, ds \quad x \in J$

$\nu = 0$ $\qquad \varphi_1(x) = 0 + \int_0^x f(s, 0)\, ds$

$\cdot \ \varphi_1(x) = \int_0^x (s + 0^2)\, ds = \frac{x^2}{2}, \ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$\cdot \ \varphi_2(x) = \int_0^x (s + \varphi_1^2(s))\, ds = \int_0^x \left(s + \frac{s^4}{4}\right) ds$

Θέλω προσέγγιση 1/10

$$|y(x)-\varphi_\nu(x)| \le \underbrace{\frac{K}{M}\frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{Kr} \le \frac{1}{10}}, \quad x\in I.$$

Αν ισχύει τότε $\forall n_1$ θα ισχύει με $n_1 > n$.

Έχουμε ότι $K = M = 2-\sqrt{2}$, $r = 1/2$

$$|y(x)-\varphi_\nu(x)| \le \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\frac{\left((2-\sqrt{2})\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{(2-\sqrt{2})\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

$\frac{1}{1,5} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{1,4} \Rightarrow -\frac{1}{1,4} < -\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{1,5}$

$$\Rightarrow \frac{(1/1,5)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{1/\sqrt{2}} = \ldots < \frac{1}{10}.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2</u> Ας είναι $\alpha, b > 0$, $f$ συνεχής στο $S = \{(x,y) : |x-x_0| \le \alpha, y \in \mathbb{R}\} \subseteq D_f$ αν η $f$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο $S$ με σταθ. $K \ge 0$. τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση που ορίζεται στο $I = \{|x-x_0| \le \alpha\}$

$M = \sup_{|x|\le\alpha} |f(x,y)|$

Η λύση $y$ είναι το όριο της ακολουθίας $(\varphi_\nu(x))_{\nu\in\mathbb{N}}$ που ορίζονται ως $\varphi(x) = y_0$, $x \in I$.

$\varphi_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\nu(s))ds$, $x \in I$ όνομα είναι

$$|y(x) - \varphi_\nu(x)| \le \frac{k}{M} \frac{(ka)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \cdot e^{kr}$$

Παράδειγμα Δ

$$y' = e^{-y^2} + \sqrt{1-x^2}, \quad y(0) = 1.$$

√ φραγμένο.

$$D_f = [-1,1] \times \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \left| e^{-y^2} \cdot (-2y) \right| = 2 \cdot \frac{|y|}{e^{+y^2}} \le k$$

φραγμένη συνάρτηση στο D.

Άρα ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. Άρα έχουμε λύση